等質開凸錐の基本相対不変式の明示的公式

中島 秀斗

九州大学大学院 数理学研究院
(JSPS Research Fellow)

2014/9/26

日本数学会 2014 年度秋季総合分科会

於 広島大学

背景

V: 有限次元の実ベクトル空間

$\Omega \subset V$: 正則な等質開凸錐, 階数 r

- 開集合で凸かつ錐 ($x, y \in \Omega, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x, x + y \in \Omega$)
- 正則：Ω は直線を含まない
- 等質：$G(\Omega) = \{g \in GL(V);\ g(\Omega) = \Omega\} \curvearrowright \Omega$: 推移的

$\exists \Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$: 既約多項式 (=基本相対不変式)

$$\Omega = \{x \in V;\ \Delta_1(x) > 0, \dots, \Delta_r(x) > 0\}.$$

Theorem (Ishi 2001)

基本相対不変式は，Vinberg 多項式 $D_1(x), \dots, D_r(x)$ を計算し，
それらから順次帰納的に既約成分を取り出していくことにより得られる.

Q. 基本相対不変式を一斉に表示する公式は?

背景

V: 有限次元の実ベクトル空間
$\Omega \subset V$: 正則な等質開凸錐, 階数 r

- 開集合で凸かつ錐 $(x, y \in \Omega, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x, x + y \in \Omega)$
- 正則：Ω は直線を含まない
- 等質：$G(\Omega) = \{g \in GL(V);\ g(\Omega) = \Omega\} \curvearrowright \Omega$: 推移的

$\exists \Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$: 既約多項式 (=基本相対不変式)

$$\Omega = \{x \in V;\ \Delta_1(x) > 0, \ldots, \Delta_r(x) > 0\}.$$

Theorem (Ishi 2001)

基本相対不変式は, Vinberg 多項式 $D_1(x), \ldots, D_r(x)$ を計算し,
それらから順次帰納的に既約成分を取り出していくことにより得られる.

Q. 基本相対不変式を一斉に表示する公式は?

概要

- 等質開凸錐とクラン
- 必要となるものの準備
    1. 指数行列
        - ⋆ 指数行列の計算
    2. Vinberg 多項式
- 主結果
- 証明の粗筋
- 今後の研究課題

等質開凸錐とクラン

次の対応を用いる (Vinberg 1963)：

$$\text{等質開凸錐} \longleftrightarrow \text{単位元を持つクラン}$$

- クラン $\begin{cases} \text{コンパクトな正規左対称代数 (非可換・非結合的)} \\ \text{右乗法作用素の行列式に基本相対不変式がすべて現れる} \end{cases}$

  (Ishi–Nomura 2008)

- $(V, \triangle)$: クラン with 単位元 e_0
- V の原始冪等元 $c_1, \ldots, c_r$ に関する正規分解 $V = \bigoplus_{1 \le j \le k \le r} V_{kj}$
  - $V_{jj} = \mathbb{R}c_j \ (j = 1, \ldots, r)$
  - V_{kj} は $c_1, \ldots, c_r$ に関するクラン積の左右乗法作用素の固有空間

    $$V_{kj} = \{x \in V;\ c_i \triangle x = (\delta_{ij} + \delta_{ik})x,\ x \triangle c_i = \delta_{ij} x\}$$

- $\exists s_0 \in V^*$ s.t. $s_0(x \triangle y)$ が内積 (認容線型形式)
  - 内積を通して双対クラン $(V, \triangledown)$ が定義できる

    $$\langle x \triangledown y | z \rangle = \langle y \,|\, x \triangle z \rangle \quad (x, y, z \in V).$$

指数行列

- V: 有限次元の実ベクトル空間
- $\Omega \subset V$: 階数 r の正則な等質開凸錐
- $\exists H$: 下三角型 Lie 群 s.t. $H \curvearrowright \Omega$: 単純推移的
  - $h \in H$ の対角成分を $h_{11}, \ldots, h_{rr}$ と書く.
- $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が H-相対不変：

$$\exists \chi\colon H \to \mathbb{R} \text{ s.t. } f(hx) = \chi(h) f(x) \quad (h \in H,\ x \in \Omega)$$

  - χ は $\chi(h) = (h_{11})^{2\tau_1} \cdots (h_{rr})^{2\tau_r}$ $(\tau_j \in \mathbb{R})$ と書ける.
  - この $(\tau_1, \ldots, \tau_r) \in \mathbb{R}^r$ を f の指数と呼ぶ.

- **基本相対不変式:** H-相対不変な既約多項式 $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ (Ishi–Nomura 2008)
- **指数行列:** $\Delta_j(x)$ の指数 $\underline{\sigma}_j = (\sigma_{j1}, \ldots, \sigma_{jr})$ を並べて得られる行列

$$\sigma = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_r \end{pmatrix} = (\sigma_{jk})_{1 \le j,k \le r}$$

  - σ は, 各成分が非負整数, 対角成分 1 の下三角行列 (cf. Ishi 2001)

指数行列の計算

- V の部分空間 $E^{[k]}, V^{[k]}$ を次で定義 $\quad (k = 1, \ldots, r-1)$

$$E^{[k]} := \bigoplus_{m>k} V_{mk}, \quad V^{[k]} := \bigoplus_{k<l\leq m\leq r} V_{ml}.$$

- $k = 1$ のとき $V = \begin{pmatrix} \mathbb{R}c_1 & {}^tE \\ E & W \end{pmatrix} \quad (E := E^{[1]},\ W := V^{[1]})$
  - $(W, \triangledown)$ はクラン $(V, \triangledown)$ の部分クラン
- $\mathcal{R}^{[1]}: W \to \mathcal{L}(E)$ を次で定義：

$$\mathcal{R}^{[1]}(w)\xi := \xi \triangledown w \quad (w \in W,\ \xi \in E)$$

  - $(\mathcal{R}^{[1]}, E)$: $(W, \triangledown)$ の自己共役表現 (W から $\mathrm{Sym}(E)$ へのクラン準同型)
  - $Q[\xi]$: $\mathcal{R}^{[1]}$ に付随する V-値二次形式

$$\langle \mathcal{R}^{[k]}(w)\xi \,|\, \xi \rangle_E = \langle Q[\xi] \,|\, w \rangle_W$$

指数行列の計算

- V の部分空間 $E^{[k]}$, $V^{[k]}$ を次で定義　$(k = 1, \ldots, r-1)$

$$E^{[k]} := \bigoplus_{m>k} V_{mk}, \quad V^{[k]} := \bigoplus_{k<l\le m\le r} V_{ml}.$$

- $k = 1$ のとき $V = \begin{pmatrix} \mathbb{R}c_1 & {}^tE \\ E & W \end{pmatrix}$　$(E := E^{[1]},\ W := V^{[1]})$
  - $(W, \triangledown)$ はクラン $(V, \triangledown)$ の部分クラン
- $\mathcal{R}^{[1]} \colon W \to \mathcal{L}(E)$ を次で定義：

$$\mathcal{R}^{[1]}(w)\xi := \xi \triangledown w \quad (w \in W,\ \xi \in E)$$

  - $(\mathcal{R}^{[1]}, E) \colon (W, \triangledown)$ の自己共役表現 (W から $\mathrm{Sym}(E)$ へのクラン準同型)
  - $Q[\xi] \colon \mathcal{R}^{[1]}$ に付随する V-値二次形式

$$\langle \mathcal{R}^{[k]}(w)\xi \,|\, \xi \rangle_E = \langle Q[\xi] \,|\, w \rangle_W$$

指数行列の計算

- H_W, Ω_W：それぞれ W に関する三角群，等質開凸錐.
- $\boldsymbol{\varepsilon} = {}^t(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^{r-1}$ に対して

$$\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}} := H_W \cdot (\varepsilon_2 c_2 + \cdots + \varepsilon_r c_r) \subset \overline{\Omega}_W$$

- $\overline{\Omega}_W = \coprod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{0,1\}^{r-1}} \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (Ishi 2000)
- $Q[E]$: $\boldsymbol{\varepsilon}^{[1]} \in \{0,1\}^{r-1}$ が一意に存在して $Q[E] = \overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{[1]}} \subset \overline{\Omega}_W$ (cf. Graczyk–Ishi 2014, Ishi 2000)
  - この $\boldsymbol{\varepsilon}^{[1]}$ は V の情報 $(\dim V_{kj})$ を用いて具体的に計算できる.
- 同様にして，$(\mathcal{R}^{[k]}, E^{[k]})$ から $\boldsymbol{\varepsilon}^{[k]} \in \{0,1\}^{r-k}$ が得られる.

Theorem

等質開凸錐 Ω の指数行列 σ は以下により計算される：

$$\sigma = \mathcal{E}_{r-1}\mathcal{E}_{r-2}\cdots\mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}^{[k]} & I_{r-k} \end{pmatrix}$$

指数行列の計算

$\boldsymbol{\varepsilon}^{[1]}$ の構成法

$d_{kj} := \dim V_{kj}$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{l}^{(2)} &:= {}^t(d_{21}, \ldots, d_{r1}), \\
\boldsymbol{l}^{(i)} &:= \begin{cases} \boldsymbol{l}^{(i-1)} - {}^t(0, \ldots, 0, d_{i,i-1}, \ldots, d_{r,i-1}) & (\boldsymbol{l}^{(i-1)}_{i-1} > 0), \\ \boldsymbol{l}^{(i-1)} & (\text{otherwise}). \end{cases}
\end{aligned}
$$

このとき $\boldsymbol{\varepsilon}^{[1]} = {}^t(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^{r-1}$ を次で定義する:

$$
\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & (\text{if } \boldsymbol{l}^{(i)}_i > 0), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}
$$

Vinberg 多項式

- $\|x\|^2 := s_0(x \triangle x)$: V のノルム
- 与えられた $x \in V$ に対して

$$x^{(j)} := \sum_{k\geq j} x_{kk}^{(j)} c_k + \sum_{m>k\geq j} X_{mk}^{(j)} \in V^{[j-1]} \quad (j = 1, \ldots, r)$$

を，帰納的に $x^{(0)} := x$ および以下で定義：

$$\begin{cases} x_{kk}^{(i+1)} & := x_{ii}^{(i)} x_{kk}^{(i)} - \frac{1}{2s_0(c_k)} \|X_{ki}^{(i)}\|^2 \quad (i < k \leq r) \\ X_{mk}^{(i+1)} & := x_{ii}^{(i)} X_{mk}^{(i)} - X_{mi}^{(i)} \triangle X_{ki}^{(i)} \quad (i < k < m \leq r) \end{cases}$$

- $D_j(x) := x_{jj}^{(j)} \in \mathbb{R}$ を Vinberg 多項式と呼ぶ (cf. Vinberg 1963)
  - 各 $D_j(x)$ は H-相対不変な多項式で $\Delta_j(x)$ を因子に持つ
  - 方程式 $he_0 = x \in \Omega$ を満たす $h \in H$ を求める際に現れる

h の対角成分は $h_{11}^2 = D_1(x), \quad h_{ii}^2 = D_1(x)^{-1} \cdots D_{i-1}(x)^{-1} D_i(x) \quad (i \geq 2)$

主結果

- $\sigma = (\sigma_{jk})_{1 \le j,k \le r}$: Ω の指数行列
  - σ は下三角行列
- $x = he_0 \in \Omega$ とすると，$\begin{cases} \Delta_j(x) = (h_{11})^{2\sigma_{j1}} \cdots (h_{jj})^{2\sigma_{jj}}, \\ h_{ii}^2 = D_1(x)^{-1} \cdots D_{i-1}(x)^{-1} D_i(x) \end{cases}$

Theorem

等質開凸錐 Ω の基本相対不変式 $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ は

$$\Delta_1(x) = D_1(x), \quad \Delta_j(x) = \frac{D_j(x)}{\prod_{i<j} D_i(x)^{\sigma_{ji} - \sigma_{j,i+1} - \cdots - \sigma_{jj}}} \quad (j \ge 2)$$

となる．ここで，冪数 $\sigma_{ji} - \sigma_{j,i+1} - \cdots - \sigma_{jj}$ は非負整数である．

証明の粗筋

基本相対不変式はクランの右乗法作用素の行列式の既約因子としてすべて現れる (Ishi–Nomura 2008) という事実を用いる.

- $x = \lambda c_1 + \xi + w$ とする.
    1. クラン V を $V = \mathbb{R}c_1 \oplus E \oplus W$ と直和分解し，右乗法作用素 R の行列式の帰納構造を調べる:
    $$\mathrm{Det}\, R_{\lambda c_1+\xi+w} = \lambda^{1+\dim E-\dim W}\, \mathrm{Det}\, R^{W}_{\lambda w-\frac{1}{2}Q[\xi]}$$
    2. $\Delta_j^W(\lambda w - \frac{1}{2}Q[\xi])$ の因数分解を考える:
    $$\Delta_j^W(\lambda w - \tfrac{1}{2}Q[\xi]) = \lambda^{\alpha_j}\Delta_j(x) \quad (j = 2, \ldots, r).$$
    3. $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を計算する: $\alpha_j = \sum_{k=2}^{r} \sigma_{jk}(1-\varepsilon_k) \quad (\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \sigma_W(\mathbf{1}-\boldsymbol{\varepsilon}))$
    4. 指数行列の帰納構造
    $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma_W \boldsymbol{\varepsilon}^{[1]} & \sigma_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{[1]} & I_{r-1} \end{pmatrix}.$$

今後の研究課題

- 例えば V を次のように分解する：$V = \begin{pmatrix} V_- & E \\ E & V_+ \end{pmatrix}$.

  V の基本相対不変式を，$V_\pm$ の基本相対不変式および E の情報を用いて計算できるか?
- 指数行列の応用
  - 基本相対不変式
  - Basic index ： $\mathrm{Det}\, R_x = \Delta_1(x)^{n_1} \cdots \Delta_r(x)^{n_r}$ に現れる冪数

$$(n_1, \ldots, n_r) = (m_1, \ldots, m_r)\sigma^{-1}, \quad m_j = \sum_{k \geq j} \dim V_{kj}.$$

  - 他には?

ご清聴ありがとうございました